



**Tentamen: Inleiding meetkunde 2018/2019**

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen. *Begin iedere opgave op een nieuw vel!*

**Opgave 1.**

- (a) **1 punt** Beschouw een driehoek  $\Delta$  op  $\mathbb{E}^2$ ,  $S^2$ ,  $\mathcal{H}^2$  (in het geval van  $S^2$  nemen we aan dat de driehoek strikt is, we nemen ook aan dat de hoekpunten niet collinear zijn). Wat is het maximale aantal rechte hoeken dat  $\Delta$  kan hebben in elk van deze drie gevallen? Bewijs je antwoord.
- (b) **1 punt** Beschouw de puntspiegeling  $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $(x, y, z, w) \mapsto (-x, -y, -z, -w)$ . Vind twee draaiingen  $T_1, T_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  zodanig dat  $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = S$ .
- (c) **1 punt** Beschouw een driehoek  $\Delta PQR$  op  $\mathcal{H}^2$  met  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (t, x, y)$ ,  $R = (t', x', y')$  en  $\angle P = \frac{\pi}{2}$ . Bewijs dat  $\cosh d(Q, R) = tt'$ .

**Opgave 2.**

- (a) **1 punt** Geef de dimensieformule voor projectief-lineaire deelruimten.
- (b) **1 punt** Beschouw drie onderling verschillende lijnen  $L, M, N$  in  $\mathbb{P}^4$  die niet in een hypervlak liggen. Laat door middel van een voorbeeld zien dat er meerdere lijnen kunnen zijn die  $L, M$  en  $N$  snijden.
- (c) **1.5 punt** Neem nu aan dat  $L, M, N$  in  $\mathbb{P}^4$  lijnen zijn die niet in een hypervlak liggen *en* dat elk tweetal van deze lijnen elkaar niet snijdt. Bereken  $\dim(\langle L, M \rangle \cap N)$  en bewijs je antwoord.

**Opgave 3.** Beschouw een driehoek  $\Delta PQR$  zodanig dat  $|PQ| = 1$ ,  $|PR| = \sqrt{3}$  en  $\angle P = \frac{\pi}{2}$ . Vorm *gelijkzijdige driehoeken*  $\Delta P'QR$ ,  $\Delta PQ'R$  en  $\Delta PQR'$  op de zijden van  $\Delta PQR$  zoals in bovenstaand figuur.

- (a) **1 punt** Kies coördinaten zodanig dat  $PQ$  op de positieve  $x$ -as ligt en  $PR$  op de positieve  $y$ -as. Laat zien dat  $R' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$  en  $Q' = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ .
- (b) **1 punt** Bewijs het volgende: (1)  $(\sqrt{3}, 1)$  staat loodrecht op zijde  $QR$ , (2)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$  is het midden van zijde  $QR$ , (3)  $P' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)$  voor  $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .
- (c) **1.5 punt** Bewijs door gebruik te maken van coördinaten dat  $PP'$ ,  $QQ'$  en  $RR'$  elkaar snijden in een punt en vind coördinaten voor dit punt.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> $F$  (het Fermat-punt) is het unieke punt in  $\Delta PQR$  met  $|FP| + |FQ| + |FR|$  minimaal (geen opgave).

**Opgave 1.** (a) Voor  $\mathbb{E}^2$  voldoen de hoeken  $a, b, c > 0$  aan de formule  $a + b + c = \pi$ . Dus maximaal één hoek kan gelijk zijn aan  $\pi/2$  en dit komt inderdaad voor. Voor  $S^2$  bestaat een driehoek met drie rechte hoeken: snij  $S^2$  met het  $xy$ -,  $xz$ -,  $yz$ -vlak en beschouw de driehoek met  $x, y, z \geq 0$ . Omdat deze vlakken allemaal loodrecht op elkaar staan, zijn alle hoeken  $\pi/2$ . Voor  $\mathcal{H}^2$  voldoen de hoeken  $a, b, c > 0$  aan de formule  $a + b + c = \pi - \text{oppervlakte } \Delta$ . Dus kan opnieuw maximaal één hoek gelijk zijn aan  $\pi/2$  en dit komt inderdaad voor. (b) Zij  $T_1$  de diagonaalmatrix  $\text{diag}(-1, -1, 1, 1)$ . Dit is draaiing rond het  $zw$ -vlak over hoek  $\pi$ . Zij  $T_2$  de diagonaalmatrix  $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$ . Dit is draaiing rond het  $xy$ -vlak over hoek  $\pi$ . Dan  $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = \text{diag}(-1, -1, -1, -1) = S$ . (c) Zij  $\alpha = d(Q, R)$ ,  $\beta = d(P, Q)$ ,  $\gamma = d(P, R)$  en  $a = \frac{\pi}{2}$  de diëderhoek te  $P$ . Dan  $\cosh \alpha = \cosh \beta \cosh \gamma - \sinh \beta \sinh \gamma \cos a = \cosh \beta \cosh \gamma$ . Zij  $p, q, r \in \mathbb{R}^3$  de vectoren die corresponderen met  $P, Q, R$ . Dan  $\cosh \beta = -p \cdot_L q = t$  en  $\cosh \gamma = -p \cdot_L r = t'$ . Dus  $\cosh d(Q, R) = tt'$ .

**Opgave 2.** (a) Stel  $L, M \subset \mathbb{P}^n$  zijn projectief-lineaire deelruimten. Dan  $\dim(L, M) = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$ . (b) Kies 2-dimensionale lineaire deelruimte  $L', M' \subset \mathbb{R}^5$  waarbij  $L' \cap M'$  1-dimensionaal en dus  $L' + M'$  3-dimensionaal is (dimensieformule). Kies  $N' \subset \mathbb{R}^5$  een 2-dimensionale lineaire deelruimte met  $(L' + M') \cap N' = \{0\}$ . Dan  $(L' + M') + N' = \mathbb{R}^5$  (dimensieformule) en liggen de bijbehorende lijnen  $L, M, N \subset \mathbb{P}^4$  niet in een hypervlak. Voor iedere  $P \in N$  kunnen we nu de lijn door  $P$  en het snijpunt van  $L, M$  trekken. Een voorbeeld in coördinaten mag ook. (c) Zij  $L', M', N' \subset \mathbb{R}^5$  de 2-dimensionale lineaire deelruimten die corresponderen met  $L, M, N$ . Dan is de doorsnede van ieder tweetal  $\{0\}$  want de bijbehorende lijnen zijn disjunct. Dus is  $L' + M'$  4-dimensionaal (dimensieformule). We weten dat  $(L' + M') + N'$  dimensie 5 heeft want  $L, M, N$  liggen niet in een hypervlak en dus heeft  $(L' + M') \cap N'$  dimensie 1 (dimensieformule). Omdat  $\langle L, M \rangle = \mathbb{P}(L' + M')$ ,  $N = \mathbb{P}(N')$  en  $\langle L, M \rangle \cap N = \mathbb{P}((L' + M') \cap N')$ , heeft dit dimensie 0.

**Opgave 3.** (a) De hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde  $\lambda$  is  $\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda$  (Pythagoras, teken een plaatje). Voor  $\lambda = 1$  geeft dit  $R' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ . Voor  $\lambda = \sqrt{3}$  geeft dit  $Q' = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ . (b) Merk op  $R\bar{Q} = (1, -\sqrt{3})$ , dus  $(\sqrt{3}, 1) \cdot R\bar{Q} = 0$  en  $(\sqrt{3}, 1)$  staat loodrecht op  $RQ$ . Het midden  $M$  van  $RQ$  is  $\frac{1}{2} \cdot (1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, \sqrt{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ . Derhalve is  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)$  de lijn door  $M$  loodrecht op  $RQ$ . Voorts  $|RQ| = \sqrt{3+1} = 2$  (Pythagoras). We zoeken dus  $\alpha$  zodanig dat  $|MP'| = \sqrt{3\alpha^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2$  (onderdeel (a) met  $\lambda = 2$ ) en dus  $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ . (c) Stel vergelijkingen op voor de lijnen  $PP'$ ,  $QQ'$  en  $RR'$ . Dus  $PP'$  wordt gegeven door  $r \cdot ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)) = (2r, \sqrt{3}r)$ . En  $QQ'$  door  $(1, 0) + s \cdot (-\frac{3}{2} - 1, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = (1 - \frac{5}{2}s, \frac{1}{2}\sqrt{3}s)$ . En  $RR'$  door  $(0, \sqrt{3}) + t \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3}) = (\frac{1}{2}t, \sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}t)$ . De claim is dat  $2r = 1 - \frac{5}{2}s = \frac{1}{2}t$  en  $\sqrt{3}r = \frac{1}{2}\sqrt{3}s = \sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}t$  een oplossing heeft. Inderdaad:  $r = \frac{1}{7}$ ,  $s = \frac{2}{7}$  en  $t = \frac{4}{7}$  en het snijpunt is  $(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7})$ .