

Tentamen Wiskundige Technieken II (WISN101) 16 maart 2009

Opgave 1

- Bepaal een primitieve van $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
- Geef een vectorpotentiaal van de vector $\mathbf{b}(x, y, z) = (1, 2, -x)$, d.w.z. vind een $\mathbf{F}(x, y, z)$ met de eigenschap dat $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{b}$. (N.B. \mathbf{F} is niet uniek, dus er zijn meerdere oplossingen mogelijk.)

Opgave 2

Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 1 + t^2.$$

Opgave 3

Los het volgende beginwaarde-probleem op:

$$\dot{x} = x + 6y, \quad \dot{y} = 5x + 2y, \quad \text{with } x(0) = 10, \quad y(0) = -1.$$

Opgave 4

Bepaal de lokale maxima en minima van de functie $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

Opgave 5

Bepaal met de kleinste-kwadratenmethode de rechte $y = ax + b$ die het best past bij de (x, y) -meetpunten $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ en $(2, 2)$.

Opgave 6

- Bepaal in het punt $(1, 1, 2)$ de richtingsafgeleide van $g(x, y, z) = x^6 + xy + zy$ in de richting $(1, 1, -1)$.
- In welke richting is in het punt $(1, 1, 2)$ de richtingsafgeleide van g het grootst? Bepaal ook deze richtingsafgeleide.
- Bepaal in elk willekeurig punt $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ de richtingsafgeleide van g in de richting $(1, 1, -1)$. Voor welke punten is dit ook de grootste richtingsafgeleide in dat punt?

Opgave 7

Bereken de arbeid

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

waarbij $\mathbf{F} = (2x + y, y^2 + x, z^3)$ en C de kromme is met beginpunt $(0, 0, 0)$ en eindpunt $(1, -1, 1)$, die geparametriseerd wordt door

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, -t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

op de volgende twee manieren, namelijk

- a) rechtstreeks en
- b) door gebruik te maken van een stelling.

Opgave 8

Gegeven de kromme K met parametrisatie $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), 1 + 4 \cos(t))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

- a) Schets de kromme K en geef aan in welke richting de kromme doorlopen wordt.
- b) Bereken de lijnintegraal $\int_K ydx + xdy$ rechtstreeks, d.w.z. gebruik geen stelling.
- c) Verifiëer het antwoord van (b) door de stelling van Green toe te passen.