

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA
UNIVERSITEIT UTRECHT

TENTAMEN THERMISCHE FYSICA 2

Donderdag 31 januari 2008, 9.00-12.00 uur

- 1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres en studierichting.
- 2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!
- 3) Het boek *Thermal Physics* van Kittel en Kroemer mag bij het tentamen gebruikt worden. ~~Andere literatuur, zoals het werkecollegedictaat en eigen aantekeningen mogen~~ niet worden gebruikt. Vergelijkingen die in het boek worden afgeleid mogen bekend worden verondersteld en hoeft u zelf dus niet meer af te leiden.



Opgave 1: Adsorptie van een Fermi-gas

Beschouw een gas van ononderscheidbare spin-1/2 atomen met een massa m . De atomen kunnen vrij bewegen door een volume V , maar kunnen ook adsorberen met bindingsenergie ϵ_B aan een wand met oppervlakte A . Na adsorptie kunnen de fermionen nog vrij langs de wand bewegen. Beschouw de fermionen aan de wand (het adsorbaat) als een ideaal Fermi-gas.

- a) Laat zien dat de toestandsdichtheid van het adsorbaat wordt gegeven door

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{mA}{\pi\hbar^2}. \quad (1)$$

- b) Bereken de chemische potentiaal μ_a van het adsorbaat bij temperatuur $T = 0$ als functie van de dichtheid n_a van het adsorbaat.
- c) Laat zien dat voor $T > 0$ de chemische potentiaal van het adsorbaat wordt gegeven door

$$\mu_a = k_B T \ln \left(e^{n_a \pi \hbar^2 / m k_B T} - 1 \right) - \epsilon_B, \quad (2)$$

met k_B de constante van Boltzmann.

Het adsorbaat is in thermisch en chemisch evenwicht met de fermionen in het volume (de damp).

-
- d) Neem voorlopig aan dat de dichtheid n_d van de damp zo laag is dat de damp als een klassiek ideaal gas mag worden beschouwd. Laat zien dat

$$n_a = \frac{m k_B T}{\pi \hbar^2} \ln \left(\frac{n_d}{2n_Q} e^{\epsilon_B / k_B T} + 1 \right), \quad (3)$$

met n_Q de quantumdichtheid van de atomen in de damp.

Voor $0 \leq k_B T \ll \epsilon_B$ zijn, met betrekking tot n_d , drie regimes te onderscheiden: het regime waarin zowel de damp als het adsorbaat zich klassiek gedragen, het regime waarin de damp zich klassiek gedraagt, maar het adsorbaat een ontaard Fermi-gas is, en het regime waarin zowel de damp als het adsorbaat ontaarde Fermi-gassen zijn.

- e) Geef aan welke waarden van n_d horen bij deze drie regimes.
- f) Hoe gedraagt n_a zich in de limit $T \rightarrow \infty$ als de dichtheid van de damp constant wordt gehouden. (Geef niet alleen de limietwaarde, maar geef ook aan op welke manier deze limietwaarde bereikt wordt als functie van de temperatuur.)
- g) Bereken de relatie tussen n_a en n_d bij $T = 0$ en geef een fysische interpretatie van het antwoord.



Opgave 2: Ising antiferromagneet in een magneetveld

Beschouw een oneindig tweedimensionaal kubisch rooster met Ising-spins $S_{\mathbf{m}}$ op de posities $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$, waarbij $S_{\mathbf{m}} = \pm 1$ en m_x en m_y alle gehele getallen doorlopen. De hamiltoniaan van dit spinsysteem is

$$H = J \sum_{\langle \mathbf{m}, \mathbf{m}' \rangle} S_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}'} - K \sum_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}} , \quad (4)$$

met $J > 0$ en de som over alle paren van naaste burens. Deze hamiltoniaan is een model voor een antiferromagneet in een magneetveld. We beschouwen allereerst het geval zonder magneetveld, dus $K = 0$.

- a) Schets de grondtoestand van dit systeem. Beargumenteer dat

$$\left\langle \sum_{\mathbf{m}} (-1)^{m_x + m_y} S_{\mathbf{m}} \right\rangle \quad (5)$$

een geschikte ordeparameter voor de antiferromagnetische faseovergang is.

Dit betekent dat het nu handig is om het gehele rooster op te splitsen in twee subroosters A en B die zich, respectievelijk, onderscheiden door de conditie $(-1)^{m_x + m_y} = \pm 1$ voor de posities \mathbf{m} . Dus het subrooster A bestaat uit al die posities \mathbf{m} waarvoor $(-1)^{m_x + m_y} = 1$. Voor subrooster B geldt analoog dat $(-1)^{m_x + m_y} = -1$.

- b) Laat nu zien dat de ordeparameter per spin $\langle N \rangle$ gegeven wordt door

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} (\langle S_A \rangle - \langle S_B \rangle) , \quad (6)$$

waarbij we met $\langle S_A \rangle$ de gemiddelde spin op een positie van subrooster A bedoelen en met $\langle S_B \rangle$ de gemiddelde spin op een positie van subrooster B .

- c) Wat is gemiddelde totale magnetisatie per spin $\langle M \rangle$ in termen van $\langle S_A \rangle$ en $\langle S_B \rangle$? Wat is gemiddelde waarde van de totale magnetisatie per spin $\langle M \rangle$ in de grondtoestand?
- d) Laat nu zien dat in de gemiddelde-veld (mean-field) benadering $\langle S_A \rangle$ voldoet aan de vergelijking

$$\langle S_A \rangle = \tanh \left(\frac{4J \langle S_A \rangle}{k_B T} \right) , \quad (7)$$

met k_B de constante van Boltzmann. Geef ook de vergelijking die $\langle S_B \rangle$ bepaalt als functie van de temperatuur T .

- e) Bepaal de kritieke temperatuur T_c .

We bekijken nu ook het geval met magneetveld, dus $K \neq 0$.

- f) Bepaal opnieuw in de gemiddelde-veld (mean-field) benadering de vergelijkingen voor $\langle S_A \rangle$ en $\langle S_B \rangle$ als functie van de temperatuur T en het magneetveld K .
- g) Schets voor één temperatuur boven T_c en voor één temperatuur beneden T_c het gedrag van zowel de ordeparameter per spin $\langle N \rangle$ en de magnetisatie per spin $\langle M \rangle$ als functie van het magneetveld. Geef een fysische interpretatie van uw antwoord. (Als u problemen hebt met de expliciete berekening, geef dan een schets met argumentatie van het resultaat dat u fysisch verwacht.)
-

