

percy.

prioriteit: 1

Tentamen NS-B251 Elektrodynamica 2, 30 augustus 2006

Duur: 3 uur

Open-boektentamen: nee

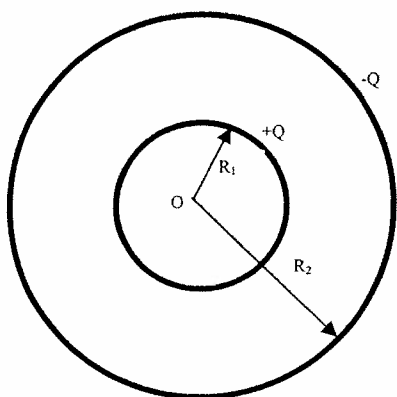
Formuleblad: ja + zelf meegenomen

Normering opgaven: zie opgaven

Let op: U moet **voorafgaande** aan het tentamen aangeven of uw tussentoets (voorjaar 2006) meetelt voor het eindcijfer.

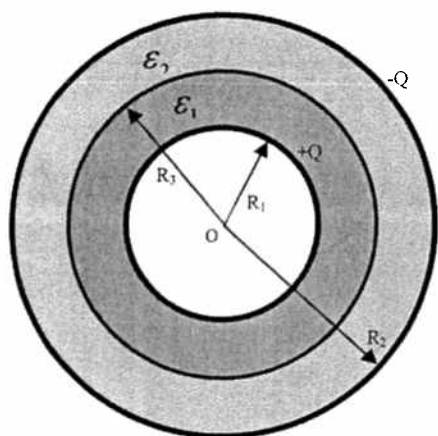
Opgave 1 [totaal 50 p]

Twee dunne, goed geleidende, metalen bolschillen met stralen R_1 en R_2 zijn concentrisch opgesteld (zie figuur). Op de binnenbol bevindt zich een positieve lading $+Q$, op de buitenbol een negatieve lading $-Q$. Binnenin de binnenbol, tussen beide bolschillen in en buiten de buitenbol heerst vacuüm. Het middelpunt van de bolschillen wordt als oorsprong O gekozen. De afstand tot O geven we aan met r .



- [7 p.] Bepaal de richting van het \vec{E} -veld en bereken zijn grootte overal in de ruimte.
- [7 p.] Bereken het potentiaalverschil ΔV tussen binnen- en buitenbol.
- [7 p.] Bereken de capaciteit C van deze bolcondensator.

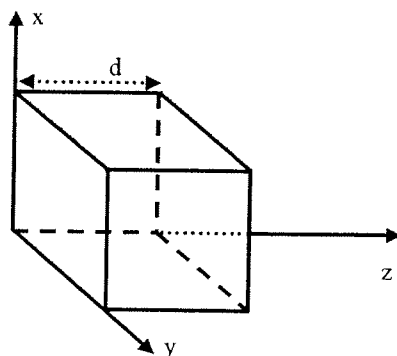
De ruimte tussen de beide bolschillen wordt vervolgens gevuld met 2 LIH (lineaire, isotrope en homogene) diëlektrica met relatieve permittiviteit $\epsilon_1 (R_1 \leq r \leq R_3)$ en $\epsilon_2 (R_3 \leq r \leq R_2)$ met $R_1 < R_3 < R_2$ (zie figuur).



- [7 p.] Bereken het \vec{D} -veld overal in de ruimte en bepaal hieruit de polarisatievektor \vec{P} binnenin de beide diëlektrica.
- [7 p.] Bereken de gebonden volume- en oppervlakteladingsdichtheden ρ_b en σ_b . Geef aan waar deze ladingen zitten.
- [7 p.] Bereken het \vec{E} -veld overal in de ruimte.
- [8 p.] Bereken het potentiaalverschil ΔV tussen binnen- en buitenbol. Bereken nu opnieuw de capaciteit (C') van de bolcondensator. Is C' groter of kleiner dan C als berekend bij onderdeel c)?

Opgave 2 [totaal 50 p]

Sommige vaste stoffen (kristallen) zijn dubbelbrekend: de brekingsindex, n , is niet hetzelfde in alle richtingen. Kwarts (SiO_2) is een voorbeeld van een zgn. uniaxiaal dubbelbrekend kristal waar de brekingsindex langs één as afwijkt. Voor kwarts is de brekingsindex $n_e=1.544$ in wat we hier kiezen als de x-richting en $n_o=1.553$ in de y- en z-richtingen (voor $\lambda=600$ nm).¹ In het kristal zijn de lichtsnelheid en de bijhorende golfvergelijkingen daarom verschillend in x, y en z richtingen.



We beschouwen een kwartskristal met dikte d . U mag aannemen dat het kristal oneindig groot is in de x- en y-richtingen, dat het kristal homogeen is, dat er geen vrije stromen en ladingen zijn in het kristal en dat $\mu = \mu_0$. Het kristal bevindt zich in vacuüm.

- a) [5 p.] Laat zien, uitgaande van de Maxwell vergelijkingen, dat de golfvergelijkingen voor het \mathbf{E} veld in het kristal ($0 \leq z \leq d$) geschreven kunnen worden als:

$$(\nabla^2 \mathbf{E})_x = \frac{n_e^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t^2}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{E})_{y,z} = \frac{n_o^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{y,z}}{\partial t^2}$$

We beschouwen nu een inkomende monochromatische elektromagnetische golf die loodrecht op het kristal in de positieve z-richting invalt:

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{met} \quad \tilde{\mathbf{E}}_0 = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_y \hat{\mathbf{y}}$$

De randvoorwaarden aan een grensvlak tussen materialen A en B zijn:

$$(i) \varepsilon_A E_A^\perp = \varepsilon_B E_B^\perp \quad (iii) \bar{E}_A^\parallel = \bar{E}_B^\parallel$$

$$(ii) B_A^\perp = B_B^\perp \quad (iv) \frac{1}{\mu_A} \bar{B}_A^\parallel = \frac{1}{\mu_B} \bar{B}_B^\parallel$$

¹ "o" niet te verwarren met de "0" in μ_0 : de subindices "o" en "e" staan voor "ordinary" en "extraordinary", wat de gebruikelijke terminologie voor dubbelbrekende materialen is. μ_0

- b) [5 p.] Bepaal met behulp van de randvoorwaarden de gereflecteerde golf $\tilde{\mathbf{E}}_R(x, y, z, t)$ voor een inkomende lineair gepolariseerde golf met de polarisatie langs de x-as ($E_y = 0$). Wat is de fase van $\tilde{\mathbf{E}}_R(x, y, z, t)$ t.o.v. $\tilde{\mathbf{E}}_I(x, y, z, t)$?

- c) [5 p.] Laat door berekening zien dat de reflectiecoëfficiënt, $R_x \equiv I_R / I_I$ voor een lineair gepolariseerde golf met de polarisatie langs de x-as geschreven kan worden als

$$R_x = \left(\frac{1 - n_e}{1 + n_e} \right)^2$$

- d) [5 p.] Bepaal de reflectiecoëfficiënt, R , voor een lineair gepolariseerde golf met een polarisatie richting die een hoek θ met de x-as maakt.

U mag in de volgende onderdelen de interne reflecties in het kristal verwaarlozen.

- e) [5 p.] Bepaal de elektromagnetische golf in het kristal voor een lineair gepolariseerde golf met de polarisatie langs de x-as ($\tilde{E}_y = 0$).

- f) [5 p.] Toon door berekening aan, dat de elektromagnetische golf in het kristal, voor een inkomende lineair gepolariseerde golf met een polarisatie richting die in het kristal op $z=0$ een hoek θ' met de x-as maakt, geschreven kan worden als

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) \propto |\mathbf{E}_m| \left[\hat{x} \cos \theta' + \hat{y} \sin \theta' e^{i(n_o - n_e) \omega z / c} \right] e^{i(n_e \omega z / c - \omega t)}$$

- g) [5 p.] Laat door berekening zien dat voor een kristal met dikte $d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}$ (een zgn. kwart-lambda plaatje), de uitgaande golf ($z > d$) horende bij een lineair gepolariseerde inkomende golf met een polarisatie richting die in het kristal op $z=0$ een hoek θ' met de x-as maakt, geschreven kan worden als

$$\mathbf{E}_{uit} \propto |\mathbf{E}_m| \left[\hat{x} \cos \theta' - i \hat{y} \sin \theta' \right] e^{i(kz - \omega t)}$$

- h) [5 p.] Laat zien dat als $\theta' = \pi / 4$ de uitgaande golf circulair gepolariseerd is. Is de golf links of rechts circulair gepolariseerd? Waarom is een kristal met een dikte van $\lambda/4$ vrijwel niet praktisch toepasbaar?
- i) [5 p.] Beschrijf **kwalitatief** waarom een **niet** loodrecht inkomende golf, die tevens niet in het yz-vlak ligt, opbreekt in twee golven in het kristal.
- j) [5 p.] Moissanite (SiC) is een diamant simulant (= kunstdiamant) die net zoals kwarts dubbelbrekend is ($\Delta n \equiv n_e - n_o = 0.043$). Diamant (C) is niet dubbelbrekend. Hoe zou je als diamanthandelaar optisch onderscheid kunnen maken tussen een moissanite kunstdiamant en een echte diamant, en hoe zou je een "kunstdiamant" moeten maken om de zichtbare verschillen te verkleinen?

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}; \quad d\tau = dx dy dz$

Gradient : $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

Laplacian : $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}; \quad d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Gradient : $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$

Laplacian : $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}; \quad d\tau = s ds d\phi dz$

Gradient : $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

Laplacian : $\nabla^2 f = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(b) - f(a)$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ (permittivity of free space)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (permeability of free space)

$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ (speed of light)

$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ (charge of the electron)

$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} - \sin \theta \sin \phi \hat{\theta} - \cos \theta \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} - \cos \theta \hat{\phi} \\ \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} - \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s \cos \phi \\ y = s \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{s} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \phi \hat{s} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$