

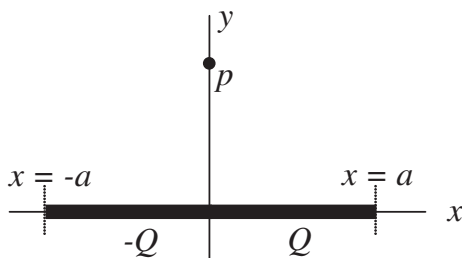
Tentamen ELE (NS-103b), 16 april 2008, 15u-18u

- Bij dit tentamen is het gebruik van rekenmachine, boek of formuleblad niet toegestaan
- Geef, overal waar dat van toepassing is, aan hoe je gebruik maakt van symmetrie om de richting van het veld te bepalen, op grond van welke overwegingen je integratiepaden en oppervlakken kiest, en waardoor toegepaste vereenvoudigingen (integralen, vectorproducten, reeksontwikkelingen etc.) gerechtvaardigd zijn.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- In totaal kun je voor dit tentamen maximaal 90 punten scoren. Je tentamen-cijfer = $1 + \frac{\text{behaald aantal punten}}{10}$.
- Je eindcijfer voor het vak is het gewogen gemiddelde van je cijfer voor dit tentamen (90%) en dat voor de inleveropgaven (10%)

SUCCES!

Opgave 1

Een positieve lijnlading met totale lading Q ligt uniform verdeeld langs de x -as, van $x = 0$ tot $x = a$. Een negatieve lijnlading $-Q$ ligt uniform verdeeld van $x = 0$ tot $x = -a$. Punt $p(0, y)$ ligt op de positieve y -as.



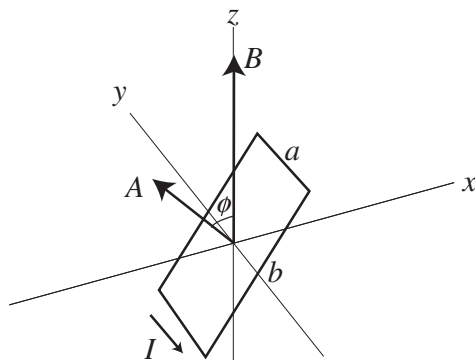
- Hoe groot is het dipoolmoment van deze ladingsverdeling? (6 punten)
- Beredeneer op basis van symmetrie welke bewering juist is over het veld in punt p : $E_x = 0$ of $E_y = 0$? (5 punten)
- Leid af dat het exacte veld in punt $p(0, y)$ gegeven wordt door:

$$\vec{E} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) \hat{x} \quad (8 \text{ punten})$$

- Leid, uitgaande van het antwoord bij c, een benadering af voor het veld op de y -as op grote afstand van de ladingsverdeling ($y \gg a$), waaruit blijkt dat E daar evenredig is met y^{-3} . (8 punten)

Opgave 2

Een magnetische dipool ondervindt in een magneetveld een draaimoment $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Een kleine magnetische dipool met bekend magnetisch dipoolmoment $\vec{\mu}$ kan zodoende worden ingezet als sensor om het B -veld in een punt kwantitatief te bepalen. Beschouw eerst een rechthoekig draadraam met N windingen en oppervlakte A (zijden a en b), dat een stroom I voert (positieve omloopszin zoals aangegeven in de figuur). Het draadraam wordt geplaatst in een homogeen magneetveld \vec{B} dat langs de z -as gericht is. De oppervlaktevector \vec{A} , die loodrecht op het vlak van het draadraam staat, maakt een hoek ϕ met het B -veld. Overige kenmerken zoals aangegeven in de figuur.



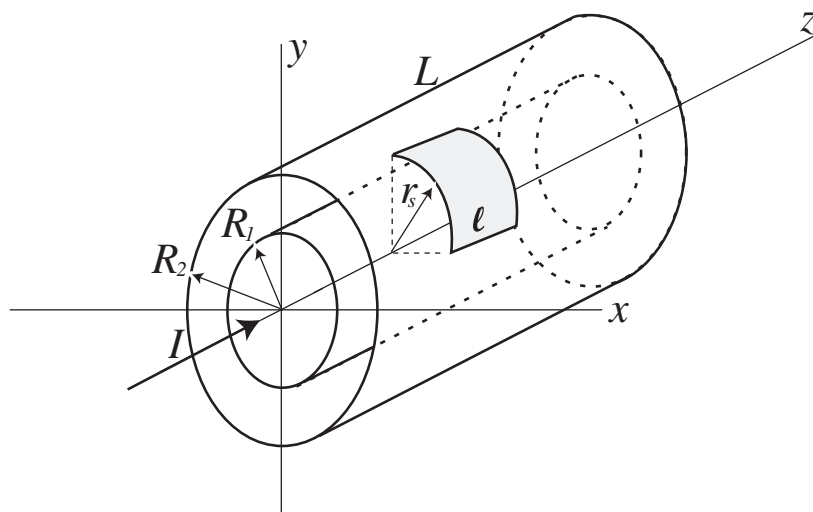
- Bereken de optredende lorentzkrachten en leid met behulp daarvan expliciet af dat de grootte van het draaimoment gegeven wordt door: $\tau = NIAB \sin \phi$. (8 punten)
- Beredeneer op basis van het resultaat voor een rechthoekig draadraam dat ook voor iedere willekeurig gevormde enkele draadlus met stroom I en oppervlakte A in hetzelfde platte vlak geldt: $\tau = IAB \sin \phi$. (6 punten)

Opgave 3

Beschouw een cilindercondensator in vacuüm, opgebouwd uit een massieve metalen cilinder met lengte L en straal R_1 concentrisch omsloten door een metalen buis met straal R_2 (L zeer veel groter dan R_1 en R_2). Op $t = 0$ geldt $Q = 0$. Vanaf dat moment begint er een stationaire stroom I te lopen waardoor de condensator voortdurend verder geladen wordt. De aansluitpunten zijn zodanig geplaatst dat de stroomverdeling cilindrisymmetrisch is rond de as van de condensator.

- Leid met behulp van de wet van Gauss af dat het E -veld in de ruimte tussen beide cilinders ($R_1 < r < R_2$) als functie van de tijd gegeven wordt door $E(t) = \frac{It}{2\pi\epsilon_0 r L}$. (7 punten)
- Bereken de capaciteit van deze condensator. (5 punten)

Kies een positief geïoriënteerd assenstelsel zoals aangegeven in de figuur, met $z = 0$ bij de 'voorzand' van de condensator.



c Leid, met behulp van de wet van Ampère, af dat het B -veld in de ruimte tussen beide cilinders ($R_1 < r < R_2$) gegeven wordt door $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{L-z}{L}$. (8 punten)

d Verifieer, gebruikmakend van de uitkomsten bij a en c, dat ook voor het oppervlak met randen zoals aangegeven in de figuur ($\frac{1}{4}$ cilindersegment concentrisch met de as van de condensator, kromtestraal r_s met ($R_1 < r_s < R_2$) en lengte ℓ) geldt dat $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_{omsl} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$. (7 punten)

Opgave 4

Beschouw een oneindig lange solenoïde met straal r_1 en met n windingen per meter, die een laagfrequente wisselstroom $I(t) = I_0 \sin \omega t$ voert.

a Bereken met behulp van de wet van Ampère het B -veld in het inwendige van de spoel als functie van de tijd. (8 punten)

Er wordt nu een tweede solenoïde toegevoegd, concentrisch met de eerste. Deze tweede solenoïde met lengte L en straal r_2 ($r_2 < r_1$) heeft N windingen.

b Bereken de geïnduceerde EMK \mathcal{E} in deze tweede spoel als functie van de tijd. (7 punten)

c Bereken de waarde van de wederzijdse inductie M . Beschouw vervolgens de omgekeerde situatie: de tweede spoel voert de boven gedefinieerde stroom $I(t)$ en ten gevolge daarvan wordt een EMK geïnduceerd in de oneindig lange solenoïde. Wat wordt nu de waarde van de geïnduceerde EMK? (7 punten)

- EINDE -