

Tussentoets Speciale Relativiteitstheorie 2013

- 1) Schrijf je naam en studentnummer op je oplossingsblad.
- 2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed.
- 3) Er zijn twee opgaven. Het resultaat telt mee voor 15% van het eindcijfer.

1. Astronaut [6 punten]

Een astronaut wil binnen 1 jaar (volgens zijn eigen tijdrekening) een ster bereiken die op een afstand (bij vertrek) van 5 lichtjaren staat. Neem als lengte-eenheid lichtjaar en als tijdseenheid jaar.

- a) Welke waarde heeft de lichtsnelheid c in deze eenheden ?
- b) Bereken welke snelheid zijn ruimteschip dan moet hebben.
- c) Hoe lang duurt de reis volgens de aardse tijdrekening ?

2. Tweelingen [9 punten]

Twee even oude broers A en B vertrekken gelijktijdig vanaf de aarde in *tegenovergestelde* richtingen. De nu volgende snelheden en afstanden zijn gemeten in het aardstelsel: A reist met een snelheid $v_A = \frac{4}{5}c$ naar een ster α op een afstand van 4 lichtjaar, en B met een snelheid $v_B = \frac{3}{5}c$ naar een ster β op een afstand van 3 lichtjaar. Op het moment dat de broers bij de ster van hun bestemming aankomen keren ze direct om en reizen terug naar de aarde met dezelfde snelheid als op de heenweg.

- a) Teken in het ruimte-tijd diagram van het aardstelsel de reizen van A en B. Na hoeveel jaar (volgens een aardse waarnemer) keren beide broers op aarde terug ?
- b) Hoe lang duurt de rondreis van A volgens zijn eigen klok ? Hoe lang duurt de rondreis van B volgens zijn eigen klok ? Wie van hen is na terugkeer ouder ?

- c) Welke afstand heeft A volgens zijn eigen waarneming afgelegd? Dezelfde vraag voor B.

De broers hebben A en B hebben ook een onderlinge snelheid, die we noteren met v_{AB} . Laat nu gegeven zijn dat $v_{AB}/c = 35/37$. De broers hebben verder afgesproken om na hun vertrek elkaar elke maand een radiobericht (of lichtsignaal) te sturen. Precies op het omkeermoment bij ster α ontvangt A een bericht van B.

- d) Wanneer heeft B op zijn klok dit bericht verzonden? Het hoeveelste bericht dat A ontvangen heeft, was dit ?

Formularium

Bij deze opgaven veronderstellen we steeds twee inertiaalwaarnemers O en O' met gesynchroniseerde klokken. Waarnemer O' beweegt met constante snelheid \vec{v} ten opzichte van O . Zoals steeds is c de lichtsnelheid, afgerond $c = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$. Een lichtjaar is de afstand die het licht aflegt in 1 jaar.

Bij een emissie en detectieproces van licht, geldt de volgende relatie:

$$t'_d = k(\beta)t_c, \quad k(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (1)$$

waarbij t'_d het moment van detectie is in het O' -stelsel, en t_c het moment van emissie in het O -stelsel. Verder hebben zoals steeds, $\beta \equiv v/c$.

Tijdsdilatatie voor inertiaalwaarnemers verhoudt zich tot de eigentijd $\Delta\tau$ via

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2)$$